Энгельсский технологический институт (филиал) федерального государственного
бюджетного образовательного учреждения
высшего образования
«Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.»

Кафедра «Естественные и математические науки»

ДИНАМИКА

Методические указания к практическим занятиям
и выполнению контрольной работы по дисциплине
«ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»
для студентов направлений

15.03.02 «Технологические машины и оборудование»
15.03.05 «Конструкторско-технологическое
обеспечение машиностроительных производств»
18.03.01 «Химическая технология»
21.03.01 «Нефтегазовое дело»

очной и заочной формы обучения

Энгельс 2024

Введение

Теоретическая механика является основой многих современных инженерных дисциплин. Без глубокого усвоения положений и методов теоретической механики невозможно дальнейшее изучение большинства технических наук. Кроме того, в процессе изучения теоретической механики студенты впервые используют математический аппарат для решения конкретных задач.

Особое место в изучении курса занимает решение задач, которое позволяет закреплять и углублять теоретические знания, развивает навыки самостоятельного мышления, помогает овладению математическими методами.

Предлагаемые методические указания предназначены для организации самостоятельной работы студентов, и могут быть использованы преподавателями при проведении практических занятий и контрольных работ по теоретической механике при изучении раздела «Динамика».

Методические указания включают в себя сведения из теории, примеры и 10 различных вариантов заданий по темам: введение в динамику точки, динамика системы материальных точек: теорема о движении центра масс системы, теорема об изменении количества движения системы, теорема об изменении момента количества движения системы, теорема об изменении кинетической энергии системы, общее уравнение динамики.

1. Введение в динамику материальной точки.

Динамикой называется раздел теоретической механики, в котором изучается движение материальных тел в зависимости от действующих на них сил.

Материальной точкой называется материальное тело, имеющего массу, размерами которого при изучении движения можно пренебречь

В основе динамики лежат следующие три закона:

1) *Закон инерции*: материальное тело (точка) сохраняет состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока приложенные силы не заставят его изменить это состояние.

Система отсчёта, по отношению к которой выполняется закон инерции, называется *инерциальной.*

2) *Основной закон*. Ускорение материального тела (точки) пропорционально приложенной к нему силе (системе сил) и имеет одинаковое с ней направление

$$m\frac{d\overline{V}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \qquad (1)$$

3) *Закон равенства действия и противодействия.* Всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие.

В динамике решаются две основные задачи:

а) зная закон движения тела (точки), определить действующие на него силы;

б) зная действующие на точку силы, определить закон движения тела (точки).

Если ввести неподвижную прямоугольную систему координат Oxy и спроектировать на её оси уравнение (1), то получим

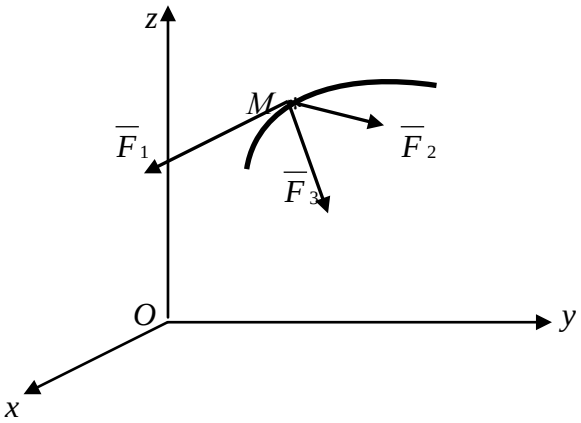

Рис.1

дифференциальные уравнения движения тела (точки) в проекциях на оси координат:

$$m\frac{dV_x}{dt}=\sum_{k=1}^{n}F_{kx}\,,\quad m\frac{dV_y}{dt}=\sum_{k=1}^{n}F_{ky}\,,\quad m\frac{dV_z}{dt}=\sum_{k=1}^{n}F_{kz} \qquad (2)$$

или

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\sum_{k=1}^{n}F_{kx}\,,\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=\sum_{k=1}^{n}F_{ky}\,,\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=\sum_{k=1}^{n}F_{kz} \qquad (3)$$

Эти уравнения позволяют решать как первую, так и вторую задачи динамики.

Пример 1. Пусть точка массы m выброшена из начала координат O с начальной скоростью V_0 под углом α к горизонту.

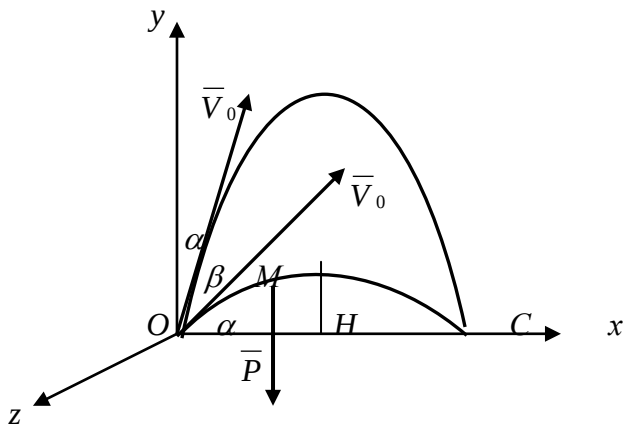

Рис. 2

<u>*Решение.*</u>

Пусть сила тяжести будет постоянной $P=mg=const$ и сила сопротивления воздуха равна нулю ($\overline{R}=0$). На точку M действует только сила тяжести.

Уравнения движения (3) точки M в данном случае имеют вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=0;\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=-mg;\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=0 \qquad (4)$$

или

$$\frac{dV_x}{dt}=0;\quad \frac{dV_y}{dt}=-g;\quad \frac{dV_z}{dt}=0 \qquad (5)$$

Разделяя переменные и интегрируя уравнения (5) получим:

$$V_x=C_1,\quad V_y=-gt+C_2,\quad V_z=C_3 \qquad (6)$$

Используя начальные условия

$$t=0;\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0;\quad V_x=V_0\cos\alpha,\quad V_y=V_0\sin\alpha,\quad V_z=0, \qquad (7)$$

найдём:

$$C_1=V_0\cos\alpha,\quad C_2=V_0\sin\alpha,\quad C_3=0 \qquad (8)$$

Подставляя вычисленные значения C_1, C_2, C_3 в (6), получим:

$$V_x=\frac{dx}{dt}=V_0\cos\alpha,\qquad V_y=\frac{dy}{dt}=V_0\sin\alpha-gt,\qquad V_z=0. \qquad (9)$$

Разделяя переменные и интегрируя уравнения (9), имеем (10)

$$x=V_0t\cos\alpha+C_4,\qquad y=V_0t\sin\alpha-\frac{gt^2}{2}+C_5,\qquad z=C_6. \qquad (11)$$

Используя начальные условия (7), найдём

$$C_4=C_5=C_6=0 \qquad (12)$$

Таким образом, уравнения движения точки имеют вид:

$$x=V_0t\cos\alpha,\qquad y=V_0t\sin\alpha-\frac{gt^2}{2},\qquad z=0. \qquad (13)$$

Имея уравнения движения, можно найти основные характеристики движения:

1) исключив из уравнений (13) параметр t, получим уравнение *траектории*:

$$y=xtg\alpha-\frac{gx^2}{2V_0^2\cos^2\alpha}, \qquad (14)$$

2) приравняв полученное выражение нулю (момент вылета и момент приземления точки), получим:

$$y=0\quad\rightarrow\quad xtg\alpha-\frac{gx^2}{2V_0^2\cos^2\alpha}=0\quad\rightarrow\quad x_1=0,\quad x_2=\frac{2V_0^2\cos^2\alpha\cdot tg\alpha}{g}, \qquad (15)$$

отсюда *горизонтальная дальность*:

$$L=OC=\frac{V_0^2}{g}\sin 2\alpha \qquad (16)$$

Наибольшая дальность будет при $\alpha=45^0$ (когда $\sin 2\alpha=1$).

3) в силу симметрии траектории (параболы), вершина её имеет абсциссу:

$$x=\frac{L}{2}=\frac{V_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha,$$

тогда *высота* траектории

$$H = y_{\max} = \frac{V_0^2}{2g}\sin^2\alpha \qquad (17)$$

4) при $x_{\max} = L$ из (13) получаем *время полёта*:

$$x = L = V_0 t\cos\alpha \quad \rightarrow \quad t_n = \frac{2V_0}{g}\sin\alpha \qquad (18)$$

Таким образом, при $\alpha = 45^0$ имеем:

$$L = \frac{V_0^2}{g}, \qquad H = \frac{V_0^2}{4g}, \qquad t_n = \frac{V_0}{g}\sqrt{2}\,. \qquad (19)$$

Пример 2. На вертикальном участке AB трубы на груз D массой m действует сила тяжести и сила сопротивления R; расстояние от точки A, где $V = V_0$, до точки B равно l. На наклонном участке BC на груз действуют сила тяжести и переменная сила $F = F(t)$.

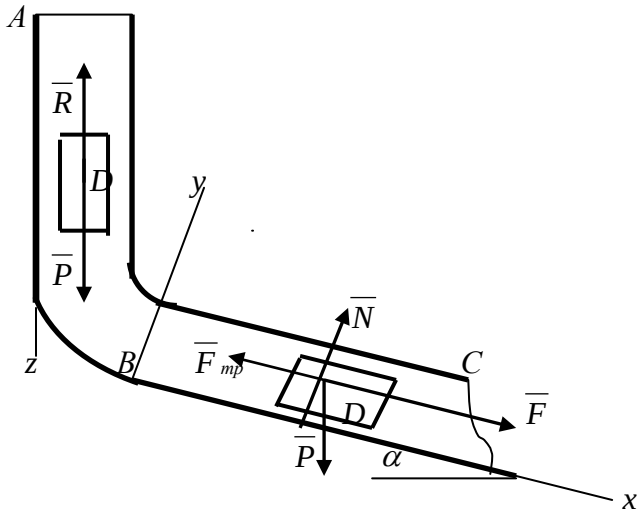

Рис.3

Дано: $m = 2кг$, $R = \mu V^2$, где $\mu = 0{,}4кг/м$, $V_0 = 5м/с$, $l = 2{,}5м$, $F_x = 16\sin(4t)$.

Определить: $x = f(t)$ - закон движения груза на участке BC.

<u>*Решение.*</u>

1) Рассмотрим движение груза на участке AB, считая груз материальной точкой. На рисунке 3 груз изображён в произвольном положении, и действующие на него силы: $\overline{P} = m\overline{g}$ и $\overline{R}$. Введём в рассмотрение ось Az, и составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на эту ось:

$$m\frac{dV_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz} \quad \rightarrow \quad m\frac{dV_z}{dt} = P - R\,. \qquad (20)$$

Воспользуемся равенством:

$$\frac{dV_z}{dt} = \frac{dV_z}{dz}\frac{dz}{dt} = V_z\frac{dV_z}{dz}\,. \qquad (21)$$

Тогда уравнение (20) можно записать в виде:

$$mV_z \frac{dV_z}{dz} = mg - \mu V^2 \qquad (22)$$

Учитывая, что $V_z = V$, получим

$$mV\frac{dV}{dz} = mg - \mu V^2 \quad \text{или} \quad V\frac{dV}{dz} = \frac{\mu}{m}(\frac{mg}{\mu} - V^2) \qquad (23)$$

Обозначим:

$$a = \frac{\mu}{m} = 0{,}2м^{-1}, \quad b = \frac{mg}{\mu} = 50м^2/c^2 \quad (g = 10м/c^2) \qquad (24)$$

Тогда уравнение (22) примет вид:

$$V\frac{dV}{dz} = -a(V^2 - b) \qquad (25)$$

Разделяя в уравнении (25) переменные и интегрируя затем, получим:

$$\frac{2VdV}{V^2 - b} = -2adz \quad \rightarrow \quad \ln(V^2 - b) = -2az + C_1 \qquad (26)$$

Из начальных условий (при $z = 0 \quad V = V_0$) следует: $C_1 = \ln(V_0^2 - b)$.

Тогда из равенства (26) следует:

$$\ln(V^2 - b) = -2az + \ln(V_0^2 - b) \quad \rightarrow \quad \ln\frac{V^2 - b}{V_0^2 - b} = -2az \quad \rightarrow \quad \frac{V^2 - b}{V_0^2 - b} = e^{-2az}, \qquad (27)$$

откуда

$$V^2 = b + (V_0^2 - b)e^{-2az} \qquad (28)$$

Полагая в равенстве (28) $z = l = 2{,}5м$ и заменяя a и b их значениями из (24), определим скорость груза в точке B ($V_0 = 5м/c$ и $e \approx 2{,}7$)

$$V_B^2 = 40{,}7 \quad \rightarrow \quad V_B = 6{,}4м/c. \qquad (29)$$

2) Рассмотрим теперь движение груза на участке BC; найденная скорость V_B будет для движения на этом участке начальной скоростью ($V_0 = V_B$). Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы $\overline{P}, \overline{F}, \overline{F}_{тр}$ и $\overline{N}$ - сила реакции связи.

Введём прямоугольную систему координат Bxy и составим дифференциальные уравнения движения груза в проекциях на оси системы координат Bxy:

$$m\frac{dV_x}{dt} = P_x + N_x + F_{трx} + F_x, \quad m\frac{dV_y}{dt} = P_y + N_y + F_{трy}$$

Так как $V_x = V$, $V_y = 0$, $P_x = mg\sin\alpha$, $P_y = -mg\cos\alpha$, $N_x = 0$, $N_y = N$, $F_{трx} = -F_{тр} = -fN$, $F_{трy} = 0$, то

$$m\frac{dV}{dt} = mg\sin\alpha - fN + 16\sin(4t), \quad 0 = -mg\cos\alpha + N \qquad (30)$$

Выражая из второго уравнения (30) N и подставляя $N = mg\cos\alpha$ в первое уравнение системы (30) получим:

$$m\frac{dV}{dt} = mg(\sin\alpha - f\cos\alpha) + 16\sin(4t) \qquad (31)$$

Разделив равенства (31) на m, вычислим

$$g(\sin\alpha - f\cos\alpha) = 10(\sin 30^0 - 0{,}2\cos 30^0) = 3{,}2; \quad \frac{16}{m} = 8. \qquad (32)$$

Подставив (32) в (30), получим:

$$\frac{dV}{dt} = 3{,}2 + 8\sin(4t) \qquad (33)$$

Умножая обе части уравнения (33) dt и интегрируя затем, найдём:

$$V = 3{,}2t - 2\cos(4t) + C_2 \qquad (34)$$

Будем теперь отсчитывать время от момента, когда груз находится в точке B, считая в этот момент времени $t = 0$. Тогда при $t = 0$ $V = V_0 = V_B$, где V_B даётся равенством (29), из (34) найдём

$$C_2 = V_B + 2\cos 0 = 6{,}4 + 2 = 8{,}4$$

При найденном значении C_2, из (34) следует

$$V = V_x = \frac{dx}{dt} = 3{,}2t - 2\cos(4t) + 8{,}4 \qquad (35)$$

Умножая обе части (35) на dt и интегрируя затем, найдём:

$$x = 1{,}6t^2 - 0{,}5\sin(4t) + 8{,}4t + C_3. \qquad (36)$$

Так как при $t = 0$ $x = 0$, то $C_3 = 0$.

Таким образом, искомый закон движения груза на участке BC будет

$$x = 1{,}6t^2 + 8{,}4t - 0{,}5\sin(4t),$$

где x – в метрах, t – в секундах.

2. Теорема о движении центра масс системы.

Совокупность материальных точек (или тел), когда положение или движение каждой точки зависит от положения, или движения остальных точек называется *механической системой.*

Движение системы зависит от её суммарной массы M и её распределения. Каждая точка системы с массой m_k может быть охарактеризована своим радиус-вектором $\bar{r}_k(x_k, y_k, z_k)$.

Центром масс системы называется точка C, радиус-вектор которой определяется формулой

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \bar{r}_k}{M},$$

или

$$x_k = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{M}, \qquad y_k = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k y_k}{M}, \qquad z_k = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k z_k}{M}. \qquad (1)$$

Пусть система будет *неизменяемой.* В этом случае её называют *абсолютно твёрдым телом (*или *телом)*.

Уравнение движения твёрдого тела (неизменяемой системы):

$$M\frac{d\bar{V}_C}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k^e, \qquad (2)$$

Произведение суммарной массы M системы на ускорение её центра масс равно геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил $\overline{F}_k^e$. (*теорема* о *движении центра масс системы*).

В проекциях на оси системы координат (2) имеет вид:

$$M\frac{d^2x_C}{dt^2}=\sum_{k=1}^{n}F_{kx}^e,\qquad M\frac{d^2y_C}{dt^2}=\sum_{k=1}^{n}F_{ky}^e,\qquad M\frac{d^2z_C}{dt^2}=\sum_{k=1}^{n}F_{kz}^e\,. \qquad (3)$$

Эти равенства представляют собой дифференциальные уравнения движения системы в проекциях на оси системы координат $Oxyz$.

Пример 3. Механическая система состоит из грузов D_1 массой m_1 и D_2 массой m_2 и из прямоугольной вертикальной плиты массой m_3, движущейся вдоль горизонтальных направляющих. В момент времени $t_0=0$, когда система находилась в покое, под действием внутренних сил грузы начинают двигаться по желобам, представляющих собой окружности радиусов r и R, по законам: $\varphi_1=f_1(t)$ и $\varphi_2=f_2(t)$.

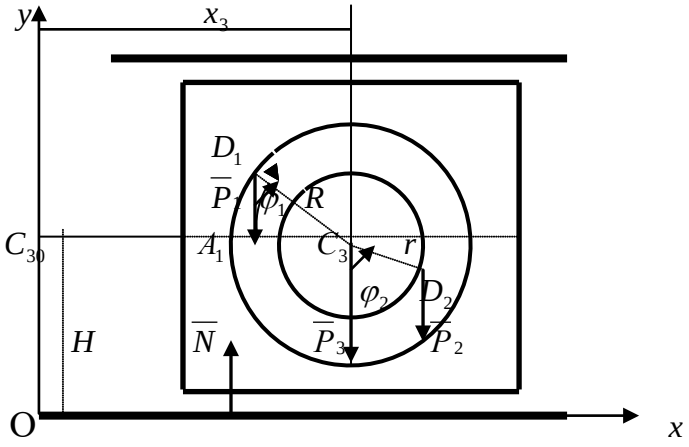

Рис.4

Дано: $m_1=6кг$, $m_2=8кг$, $m_3=12кг$, $r=0{,}6м$, $R=1{,}2м$, $\varphi_1=\pi t\ рад$, $\varphi_2=\frac{\pi}{2}(1-t)рад$ ($t-$ в секундах).

Определить: $x_3=f_3(t)$ - закон движения плиты; $N=f(t)$ - закон изменения со временем полной нормальной реакции направляющих.

<u>*Решение.*</u>

Изобразим действующие на механическую систему в произвольном положении внешние силы: силы тяжести $\overline{P}_1,\overline{P}_2,\overline{P}_3$ и суммарную (полную) реакцию направляющих $\overline{N}$. Введём прямоугольную систему координат Oxy так, чтобы ось Ox была направлена по направлению движения плиты, а ось Oy проходила через точку C_{30}, где находился центр масс плиты в момент времени $t_0=0$.

а) Для определения $x_3=f_3(t)$ воспользуемся *теоремой о движении центра масс системы*. Составим дифференциальное уравнение его движения в проекции на ось Ox:

$$M\frac{d^2x_C}{dt^2}=\sum_{k=1}^{n}F_{kx}^{e} \quad \rightarrow \quad M\frac{d^2x_C}{dt^2}=0\,, \qquad (4)$$

так как $\sum_{k=1}^{n}F_{kx}^{e}=0,$ поскольку все действующие на систему внешние силы вертикальны.

Проинтегрировав уравнение (4), найдём, что $M\frac{dx_C}{dt}=C_1,$ то есть проекция скорости центра масс системы на ось Ox есть величина постоянная. Так как в начальный момент времени $V_{Cx}=0$ (по условию), то $C_1=0$.

Интегрируя уравнение $M\frac{dx_C}{dt}=0$, получим

$$Mx_C=const\,, \qquad (5)$$

то есть центр масс системы вдоль оси Ox перемещаться не будет.

Найдём значение Mx_C. Из рисунка 4 следует, что в произвольный момент времени абсциссы грузов D_1 и D_2 равны соответственно:

$$x_1=x_3-R\cos\varphi_1, \qquad x_2=x_3+r\sin\varphi_2\,.$$

Так как из формулы (1), определяющей координату x_C центра масс системы

$$Mx_C=m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3\,,$$

то

$$Mx_C=(m_1+m_2+m_3)x_3-m_1R\cos(\pi t)+m_2r\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi t}{2}). \qquad (6)$$

В соответствии с равенством (5) координаты центра масс x_C всей системы в начальном и произвольном положении будут равны. Следовательно, учитывая, что при $t_0=0$ $x_3=0$, получим

$$-m_1R+m_2r=(m_1+m_2+m_3)x_3-m_1R\cos(\pi t)+m_2r\cos(\frac{\pi t}{2}). \qquad (7)$$

Отсюда получаем зависимость от времени координаты x_3 - закон движения плиты.

б) Для определения $N=f(t)$ составим дифференциальное уравнение движения центра масс системы в проекции на вертикальную ось Oy:

$$M\frac{d^2y_C}{dt^2}=\sum_{k=1}^{n}F_{ky}^{e} \quad \rightarrow \quad M\frac{d^2y_C}{dt^2}=N-P_1-P_2-P_3 \qquad (8)$$

Отсюда

$$N=M\frac{d^2y_C}{dt^2}+(m_1+m_2+m_3)g\,. \qquad (9)$$

По формуле (1), определяющей ординату y_C центра масс системы, имеем:

$$My_C=m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3 \qquad (10)$$

Из рисунка 4 следует:

$$y_1=H+R\sin\varphi_1, \quad y_2=H-r\cos\varphi_2, \quad y=H=OC_{30}=const\,,$$

тогда

$$My_C = (m_1 + m_2 + m_3)H + m_1 R\sin(\pi t) - m_2 r\sin(\frac{\pi t}{2})$$

Продифференцировав обе части этого равенства два раза по времени, найдём

$$M\frac{dy_C}{dt} = m_1 R\pi\cos(\pi t) - m_2 r(\frac{\pi}{2})\cos(\frac{\pi t}{2})$$

$$M\frac{d^2 y}{dt^2} = -m_1 R\pi^2\sin(\pi t) + m_2 r(\frac{\pi^2}{4})\sin(\frac{\pi t}{2})$$

Подставив это значение $M\frac{d^2 y}{dt^2}$ в уравнение (9), определим искомую зависимость N от времени t.

$$N = 254{,}8 - 1{,}2\pi^2[6\sin(\pi t) - \sin(\frac{\pi t}{2})],$$

где t - в секундах, N - в ньютонах.

3. Теорема об изменении количества движения системы

Количество движения системы равно произведению массы всей системы на скорость её центра масс:

$$\overline{Q} = M\overline{V}_C \qquad (1)$$

Отсюда и уравнения движения системы следует:

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^{n}\overline{F}_k^e \qquad (2)$$

Производная по времени от количества движения системы равна геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил (*теорема об изменении количества движения системы в дифференциальной форме*).

Уравнение (2) в проекциях на оси системы координат $Oxyz$:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum_{k=1}^{n}F_{kx}^e, \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum_{k=1}^{n}F_{ky}^e, \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n}F_{kz}^e. \qquad (3)$$

Пример 4. В центре тяжести A тележки массой m_1, движущейся по гладкой горизонтальной плоскости, укреплён невесомый стержень AD длиной l с грузом D массой m_2 на конце. В момент времени $t_0 = 0$, когда скорость тележки $u = u_0$, стержень AD начинает вращаться вокруг оси A по закону $\varphi = \varphi(t)$.

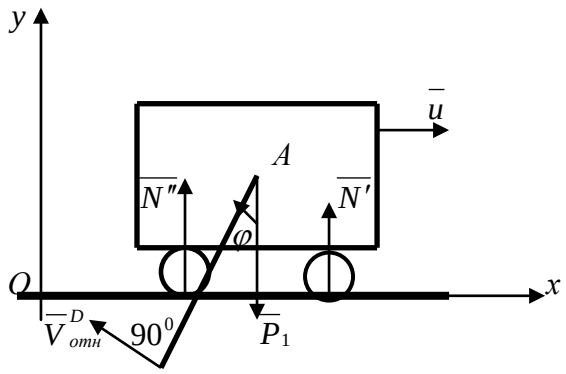

Рис. 5

Дано: $m_1 = 24кг$, $m_2 = 12кг$, $u_0 = 0{,}5м/с$, $l = 0{,}6м$, $\varphi(t) = \frac{\pi}{3}(1+2t^3)рад$, ($t$ - в сек.)

Определить: $u = f(t)$ - закон изменения скорости тележки.

<u>*Решение.*</u>

Рассмотрим механическую систему, состоящую из тележки и груза D в произвольном положении. На рисунке 5 изображены действующие на систему внешние силы: силы тяжести $\overline{P}_1, \overline{P}_2$ и реакции плоскости $\overline{N}_1{}', \overline{N}_2{}'$.

Введём прямоугольную систему координат Oxy так, чтобы ось Ox была горизонтальна.

Для определения u воспользуемся *теоремой об изменении количества движения системы* $\overline{Q}$ в проекции на ось Ox.

Так как все действующие на систему внешние силы вертикальны, то $\sum_{k=1}^{n} F_{kx}^{e} = 0$, и из формулы (3) следует:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^{e} = 0 \quad \rightarrow \quad Q_x = C \qquad (4)$$

Для рассматриваемой механической системы

$$\overline{Q} = \overline{Q}^T + \overline{Q}^D, \qquad \overline{Q}^T = m_1\overline{u}, \quad \overline{Q}^D = m_2\overline{V}^D,$$

где $\overline{Q}, \overline{Q}^T, \overline{Q}^D$ - количества движения соответственно механической системы, тележки и груза D ($\overline{u}$ - скорость тележки, $\overline{V}^D$ - скорость груза по отношению к осям системы координат Oxy). Тогда из равенства (4) следует, что

$$Q_x^T + Q_x^D = C \qquad \rightarrow \qquad m_1 u_x + m_2 V_x^D = C \qquad (5)$$

В системе координат $Oxy: u_x = u$. Для определения V_x^D рассмотрим движение груза D как сложное, считая его движение по отношению к тележке относительным (это движение, совершаемое при вращении стержня AD вокруг оси A), а движение самой тележки – переносным движением.

Тогда

$$\overline{V}^D = \overline{V}_{пер}^D + \overline{V}_{отн}^D \qquad \rightarrow \qquad V_x^D = V_{перх}^D + V_{отнт}^D \qquad (6)$$

Но $\overline{V}_{пер}^D = \overline{u}$ и, следовательно, $V_{перх}^D = u_x = u$. Вектор $\overline{V}_{отн}^D$ направлен перпендикулярно стержню и численно равен:

$$V_{отн}^D = l \cdot \omega_{AD} = l \cdot \dot{\varphi} = 2l\pi t^2$$

С учётом знака $\dot{\varphi}$ имеем: $V_{отнч}^D = -V_{отн}^D \cdot \cos\varphi$, тогда из равенства (6) получим:

$$V_x^D = u - V_{отн}^D \cdot \cos\varphi = u - 2l\pi t^2 \cos(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}t^3) \qquad (7)$$

Подставляя (7) в равенство (5), получим:

$$m_1 u + m_2 u - m_2 2l\pi t^2 \cdot \cos(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} t^3) = C \qquad (8)$$

Постоянную величину C определим из начального условия: при $t = 0 \quad u = u_0$. Отсюда

$$C = (m_1 + m_2) u_0$$

Тогда из равенства (8) получим:

$$(m_1 + m_2) u - 2m_2 l\pi t^2 \cos(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} t^3) = (m_1 + m_2) u_0 .$$

Отсюда находим искомую зависимость скорости тележки от времени:

$$u = u_0 + \frac{2l\pi m_2}{m_1 + m_2} t^2 \cdot \cos(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} t^3) \qquad (9)$$

Подставив сюда значения соответствующих величин, находим:

$$u = 0{,}5 + 0{,}4\pi t^2 \cdot \cos(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} t^3) \quad м/с.$$

4. Теорема об изменении кинематического момента системы.

Главным моментом количества движения системы (кинетическим моментом) относительно данного центра O называется векторная величина $\overline{K}_o$, равная геометрической сумме моментов количеств движения всех точек системы, относительно этого центра.

$$\overline{K}_O = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_O (m_k \overline{V}_k), \qquad (1)$$

или в проекциях на оси системы координат Oxy:

$$K_x = \sum_{k=1}^{n} m_x (m_k \overline{V}_k), \quad K = \sum_{k=1}^{n} m_y (m_k \overline{V}_k), \quad K = \sum_{k=1}^{n} m_z (m_k \overline{V}_k). \qquad (2)$$

Кинетический момент является характеристикой вращательного движения системы. Можно показать, что

$$K_z = J_z \omega, \qquad (3)$$

кинетический момент вращающегося тела относительно оси вращения Oz равен произведению момента инерции тела относительно этой же оси на угловую скорость тела.

Теорема об изменении кинетического момента системы: производная по времени от кинетического момента системы относительно неподвижного центра равна геометрической сумме моментов всех внешних сил системы относительно того же центра:

$$\frac{d\overline{K}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_O (\overline{F}_k^e) \qquad (4)$$

В проекциях на оси системы координат Oxy уравнение (4) запишется в виде:

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_x (\overline{F}_k^e), \quad \frac{dK_y}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_y (\overline{F}_k^e), \quad \frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_z (\overline{F}_k^e) \qquad (5)$$

Пример 5. Однородная горизонтальная платформа (прямоугольная со сторонами $2l$ и l), имеющая массу m_1, жёстко скреплена с вертикальным

валом и вращается вместе с ним вокруг оси Oz с угловой скоростью ω_0. В момент времени $t_0 = 0$ на вал начинает действовать вращающий момент M, направленный противоположно ω_0; одновременно груз D массой m_2, находящийся в жёлобе AB в точке C, начинает двигаться по жёлобу (под действием внутренних сил) по закону $s = CD = F(t)$.

Дано: $m_1 = 16кг$, $m_2 = 10кг$, $l = 0{,}5м$, $\omega_0 = 2c^{-1}$, $s = 0{,}4t^2$ (s - в метрах, t - в секундах), $M = 6tн$ ($н/м$).

Определить: $\omega = f(t)$ - закон изменения угловой скорости платформы.

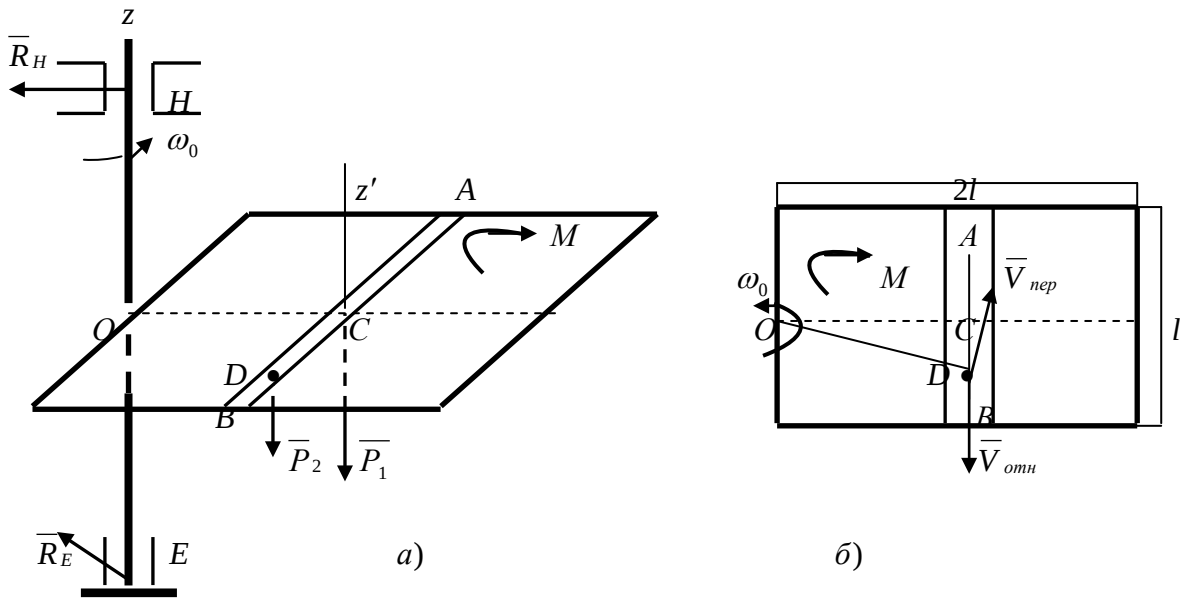

Рис.6

<u>*Решение.*</u>

Рассмотрим механическую систему, состоящую из платформы и груза D. Для определения ω применим теорему об изменении кинетического момента системы относительно оси Oz (5):

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_z(\overline{F}_k^e).$$

Изобразим действующие на систему внешние силы: силы тяжести $\overline{P}_1, \overline{P}_2$, реакции $\overline{R}_E, \overline{R}_H$ и вращающий момент M. Так как силы $\overline{P}_1, \overline{P}_2$ параллельны оси Oz, а реакции $\overline{R}_E, \overline{R}_H$ эту ось пересекают, то их моменты относительно оси Oz равны нулю. Тогда, считая для момента положительным направление ω_0 (то есть против хода часовой стрелки), получим:

$$\sum_{k=1}^{n} m_z(\overline{F}_k^e) = -M = -6t,$$

тогда

$$\frac{dK_z}{dt} = -6t \qquad (6)$$

Разделяя переменные в этом дифференциальном уравнении, и интегрируя

его затем, получим:

$$K_z = -6 \cdot \frac{t^2}{2} + C \quad \rightarrow \quad K_z = -3t^2 + C. \qquad (7)$$

Для рассматриваемой механической системы

$$K_я = K_z^{пл} + K_z^D, \qquad (8)$$

где $K_z^{пл}$ и K_z^D - кинетические моменты платформы и груза D соответственно.

Так как платформа вращается вокруг оси Oz, то

$$K_z^{пл} = J_z \omega \qquad (9)$$

Значение момента инерции J_z найдём с помощью теоремы Гюйгенса:

$$J_z = J_{Cz'} + m_1 (OC)^2 = J_{Cz'} + m_1 l^2, \qquad (10)$$

где $J_{Cz'}$ - момент инерции платформы относительно оси Cz', параллельной оси Oz и проходящей через центр C платформы.

Известно, что момент инерции прямоугольной пластины со сторонами a_1 и a_2 массой m_1 относительно оси Cz', перпендикулярной пластине и проходящей через её центр масс C, равен:

$$J_{Cz'} = m_1 \frac{a_1^2 + a_2^2}{12} \qquad (11)$$

В нашем случае $a_1 = 2l$, $a_2 = l$. тогда

$$J_{Cz'} = m_1 \frac{(2l)^2 + (l)^2}{12} = \frac{5}{12} m_1 l^2. \qquad (12)$$

Отсюда

$$J_z = \frac{5}{12} m_1 l^2 + m_1 l^2 = \frac{17}{12} m_1 l^2 \qquad (13)$$

Следовательно,

$$K_z^{пл} = \frac{17}{12} m_1 l^2 \omega. \qquad (14)$$

Для определения K_z^D рассмотрим движение груза D как сложное, считая его движение по платформе относительным, а вращение самой платформы вокруг оси Oz переносным движением. Тогда абсолютная скорость груза D равна:

$$\overline{V} = \overline{V}_{отн} + \overline{V}_{пер} \qquad (15)$$

Так как груз D движется по закону $s = CD = 0{,}4t^2$, то

$$V_{отн} = \dot{s} = 0{,}8t \qquad (16)$$

На рисунке 5б вектор $\overline{V}_{отн}$ изображён с учётом знака $\dot{s}$ (при $\dot{s} < 0$ направление $\overline{V}_{отн}$ было бы противоположным). Затем, учитывая направление ω, изображаем вектор $\overline{V}_{пер}$ ($\overline{V}_{пер} \perp OD$); численно

$$V_{пер} = \omega \cdot OD.$$

Тогда по теореме Вариньона (см. Статика) имеем:

$$K_z^D = m_z(m_2 \overline{V}) = m_z(m_2 \overline{V}_{отн}) + m_z(m_2 \overline{V}_{пер}) = -m_2 V_{отн} \cdot OC + m_2 V_{пер} \cdot OD =$$
$$= -m_2 \cdot 0{,}8tl + m_2 \omega (OD)^2. \qquad (17)$$

Из прямоугольного треугольника OCD (рис.6б) следует:

$$OD^2 = OC^2 + CD^2 \quad \rightarrow \quad OD^2 = l^2 + s^2 = l^2 + 0{,}16t^4 \qquad (18)$$

Подставляя (18) в равенство (17), а затем значения $K_z^{пл}$ и K_z^D из (17) и (14) в равенство (8), получим с учётом данных задачи

$$K_z = \frac{17}{12} m_1 l^2 \omega + m_2 \omega (l^2 + 0{,}16t^4) - m_2 (0{,}8t) l = (8{,}17 + 1{,}6t^4)\omega - 4t\,. \qquad (19)$$

Тогда равенство (7) примет вид:

$$(8{,}17 + 1{,}6t^4)\omega - 4t = -3t^2 + C \qquad (20)$$

Постоянную интегрирования C определяем по начальным условиям:
при $t = 0$ $\omega = \omega_0$. Тогда $C = 8{,}17\omega_0 = 16{,}34$.

Таким образом, искомая зависимость ω от t имеет вид:

$$\omega = \frac{16{,}34 + 4t - 3t^2}{8{,}17 + 1{,}6t^4},$$

где t - в секундах, ω - c^{-1}.

5. Теорема об изменении кинетической энергии системы.

Скалярная величина T, равная сумме кинетических энергий всех точек системы, называется *кинетической энергией системы*.

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k V_k^2}{2} \qquad (1)$$

Кинетическая энергия является характеристикой поступательного и вращательного движения системы. На её изменение влияет действие внешних сил и так как она является скаляром, то не зависит от направления движения частей системы.

Кинетическая энергия для поступательного движения системы равна половине произведения массы системы на квадрат скорости центра масс:

$$T_{пост} = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k V_k^2}{2} = \frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{n} m_k) V_C^2 = \frac{1}{2} M V_C^2 \qquad (2)$$

Кинетическая энергия тела при вращательном движении равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат его угловой скорости.

$$T_{вр} = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k V_k^2}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k \omega^2 h_k^2}{2} = \frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{n} m_k h_k^2)\omega^2 = \frac{1}{2} J_z \omega^2\,. \qquad (3)$$

Кинетическая энергия тела при плоскопараллельном движении равна сумме энергии поступательного движения и энергии вращательного движения.

$$T_{пл.пар} = \frac{1}{2} M V_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2 \qquad (4)$$

Теорема об изменении кинетической энергии системы: изменение кинетической энергии системы при некотором её конечном перемещении равно сумме работ на этом перемещении всех приложенных к системе внешних и внутренних сил.

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e + \sum_{k=1}^{n} A_k^i \qquad (5)$$

(Для *неизменяемой системы* $\sum_{k=1}^{n} A_k^i = 0$, тогда $T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e$).

Пример 6. Механическая система состоит из сплошного однородного цилиндрического катка 1, подвижного блока 2, ступенчатого шкива 3 с радиусами R_3 и r_3 и радиусом инерции ρ_3 относительно оси вращения,s блока 4 и груза 5 (коэффициент трения груза о плоскость равен f). Тела системы соединены нитями, намотанными на шкив 3. К центру Е блока 2 прикреплена пружина с коэффициентом жёсткости c; её начальная деформация равна нулю. Система приходит в движение из состояния покоя под действием силы $F = f(s)$, зависящей от перемещения s точки её приложения. На шкив 3 при движении действует постоянный момент M сил сопротивления.

Дано: $m_1 = 8кг$, $m_2 = 0$, $m_3 = 4кг$, $m_4 = 0$, $m_5 = 10кг$, $R_3 = 0{,}3м$, $r_3 = 0{,}1м$, $\rho_3 = 0{,}2м$, $f = 0{,}1$; $c = 240н/м$, $M = 0{,}6нм$, $F = 20(3+2s)н$, $s_1 = 0{,}2м$.

Определить: ω_3 в тот момент времени, когда $s = s_1$.

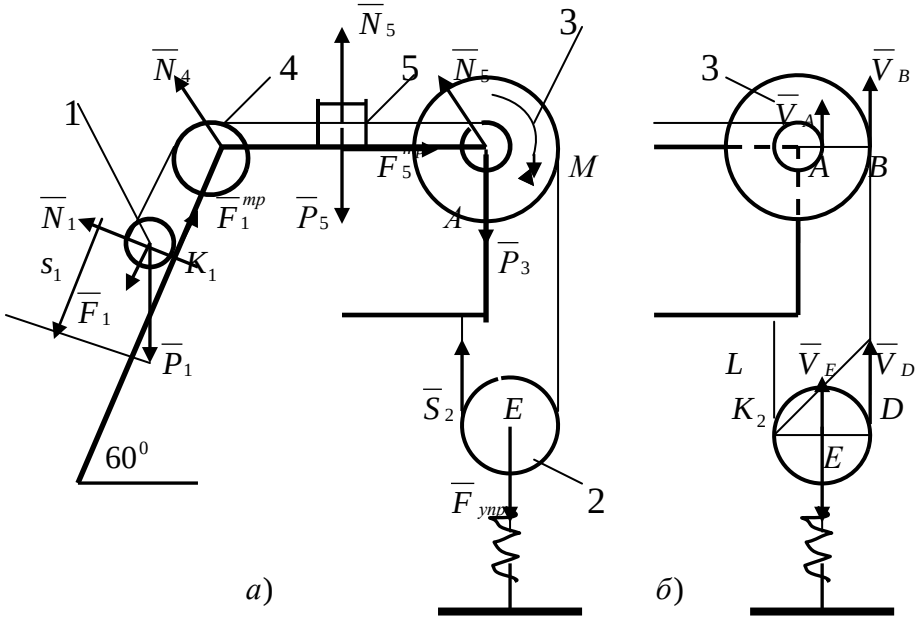

Рис.7

<u>*Решение.*</u>

1) Рассмотрим движение неизменяемой механической системы, состоящей из весомых тел 1,3,5 и невесомых тел 2,4, соединённых нитями. На рисунке 7 изображены действующие на систему внешние силы: активные $\overline{F}$, $\overline{F}_{упр}$, $\overline{P}_1$, $\overline{P}_3$, $\overline{P}_5$, реакции $\overline{N}_1, \overline{N}3, \overline{N}_4, \overline{N}_5$, натяжение нити $\overline{S}_2$, силы трения $\overline{F}_1^{тр}, \overline{F}_2^{тр}$,и момент M.

Для определения ω_3 воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии:

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e \qquad (6)$$

2) Определим T_0 и T. Так как в начальный момент времени система находилась в покое, то $T_0 = 0$. Величина T равна сумме кинетических энергий всех тел системы:

$$T = T_1 + T_3 + T_5 \qquad (7)$$

Учитывая, что тело 1 движется плоскопараллельно, тело 5 – поступательно, а тело 3 вращается вокруг неподвижной оси, получим:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_{C_1}^2 + \frac{1}{2} J_{C_1} \omega_1^2; \quad T_3 = \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2; \quad T_5 = \frac{1}{2} m_5 V_5^2 \qquad (8)$$

Все входящие в (8) скорости надо выразить через искомую угловую скорость ω_3. Для этого предварительно заметим, что $V_{C_1} = V_5 = V_A$, где A - любая точка обода радиуса r_3 шкива 3 и что точка K_1 - мгновенный центр скоростей катка 1, радиус которого обозначим r_1. Тогда

$$V_{C_1} = V_5 = \omega_3 r_3; \quad \omega_1 = \frac{V_{C_1}}{K_1 C_1} = \frac{V_{C_1}}{r_1} = \omega_3 \frac{r_3}{r_1} \qquad (9)$$

Кроме того, входящие в (8) моменты инерции имеют значения:

$$J_{C_1} = 0{,}5 m_1 r_1^2; \quad J_3 = m_3 \rho_3^2. \qquad (10)$$

Подставив все величины (9) и (10) в равенства (8), а затем, используя равенство (7), получим окончательно:

$$T = (\frac{3}{4} m_1 r_3^2 + \frac{1}{2} m_3 \rho_3^2 + \frac{1}{2} m_5 r_3^2) \omega_3^2. \qquad (11)$$

3) Теперь найдём сумму работ всех действующих внешних сил при перемещении, которое будет иметь система, когда центр катка 1 пройдёт путь s_1. Введя обозначение: s_5 - перемещение груза 5 ($s_5 = s_1$), φ_3 - угол поворота шкива 3, λ_0 и λ_1 - начальное и конечное удлинение пружины, получим:

$$A(\overline{F}) = \int_0^{s_1} 20(3 + 2s) ds = 20(3s_1 + s_1^2); \quad A(\overline{P}_1) = P_1 s_1 \sin 60^0; \quad A(M) = -M\varphi_3;$$

$$A(\overline{F}_5^{тр}) = -F_5^{тр} s_5 = -fP_5 s_1; \quad A(\overline{F}_{упр}) = \frac{c}{2}(\lambda_0^2 - \lambda_1^2). \qquad (12)$$

Работы остальных сил равны нулю, так как точки K_1 и K_2, где приложены силы $\overline{N}_1, \overline{F}_1^{тр}$ и $\overline{S}_2$ - мгновенные центры скоростей, точки, где приложены силы $\overline{P}_3, \overline{N}_3$ и $\overline{P}_4$ - неподвижны, а реакция $\overline{N}_5$ перпендикулярна перемещению груза.

По условию $\lambda_0 = 0$. Тогда $\lambda_1 = s_E$, где s_E - перемещение точки E - (конца пружины). Величины s_E и φ_3 надо выразить через заданное перемещение s_1; для этого учтём, что зависимость между перемещениями здесь такая же, как и между соответствующими скоростями. Тогда, так как $V_{C_1} = V_A$, то

$$\omega_3 = \frac{V_A}{r_3} = \frac{V_{C_1}}{r_3} \quad \rightarrow \quad \varphi_3 = \frac{s_1}{r_3}.$$

Из рисунка 7 следует, что $V_D = V_B = \omega_3 R_3$, а так как точка K_2 является мгновенным центром скоростей для блока 2 (он как бы «катиться» по участку нити K_2L), то $V_E = 0{,}5V_D = 0{,}5\omega_3 R_3$; следовательно, и

$$\lambda_1 = s_E = 0{,}5\varphi_3 R_3 = 0{,}5 s_1 \frac{R_3}{r_3}$$

При найденных значениях φ_3 и λ_1 для суммы вычисленных работ получим:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^e = 20(3s_1 + s_1^2) + P_1 s_1 \sin 60^0 - fP_5 s_1 - M\frac{s_1}{r_3} - \frac{c}{8}\frac{R_3^2}{r_3^2}s_1^2 \qquad (13)$$

Подставляя выражения (11) и (13) в уравнение (6) и учитывая, что $T_0 = 0$, придём к равенству:

$$(\frac{3}{4}m_1 r_3^2 + \frac{1}{2}m_3\rho_3^2 + \frac{1}{2}m_5 r_3^2)\omega_3^2 = 20(3s_1 + s_1^2) + P_1 s_1 \sin 60^0 - fP_5 s_1 - \frac{M}{r_3}s_1 - \frac{c}{8}\frac{R_3^2}{r_3^2}s_1^2. \quad (14)$$

Из равенства (14), подставив в него числовые значения заданных величин, найдём искомую угловую скорость ω_3:

$$\omega_3 = 8{,}1c^{-1}.$$

6. Плоскопараллельное движение абсолютно твёрдого тела.

Твёрдое тело будет совершать плоскопараллельное движение, если в нём существует плоское сечение, относительно которого масса тела распределена симметрично; силы, действующие на тело, расположены в плоскости этого сечения, а начальные скорости всехточек тела расположены в плоскостях. параллельных плоскости сечения.

В кинематике было установлено, что положение твёрдого тела, совершающего плоское движение, определяется тремя параметрами. За эти параметры обычно выбирают координаты центра масс тела и угол поворота тела относительно оси, перпендикулярной к рассматриваемому плоскому сечению тела.

Уравнения плоскопараллельного движения твёрдого тела представляют собой систему трёх обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$m\frac{d^2x_C}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e + \sum_{k=1}^{n} N_{kx}\,,\ m\frac{d^2y_C}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}^e + \sum_{k=1}^{n} N_{ky}\,,\ J_{Cz}\varepsilon = \sum_{k=1}^{n} m_{Cz}(\overline{F}_k^e) + \sum_{k=1}^{n} m_{Cz}(\overline{N}_k)\,,(1)$$

где F_{rx}^e, F_{ky}^e - проекции внешних активных сил на оси Ox и Oy; N_{kx}, N_{ky} - проекции реакций на оси Ox и Oy; $m_{Cz}(\overline{F}_k^e)$ и $m_{Cz}(\overline{N}_k)$ - моменты соответстенно внешних активных сил и сил реакций относительно центра масс; x_C, y_C - координаты центра масс C; $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ - угловое ускорение вращения около оси Cz; φ - угол поворота тела вокруг оси Cz.

Пример 7. Барабан (сплошной однородный цилиндр) радиуса R и весом P начинает катиться без скольжения из состояния покоя по наклонной плоскости с углом наклона α; на барабан действуют сила $\overline{F}$ и пара сил с моментом M.

Дано: P, $F = 0{,}8P$, $M = 1{,}1PR$, $\alpha = 30^0$, $\beta = 30^0$.

Определить: 1) $x_C = f(t)$ - закон движения центра масс барабана;

2) $f_{\min}$ - наименьший коэффициент трения, пи котором возможно качение без скольжения.

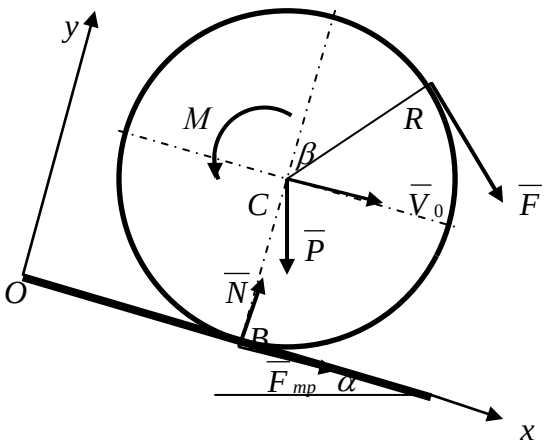

Рис. 8

<u>*Решение.*</u>

Барабан совершает плоскопараллельное движение под действием сил: $\overline{P}, \overline{F}, \overline{N}, \overline{F}_{тр}$ и момента M. Так как направление силы трения $\overline{F}_{тр}$ заранее неизвестно, товыбираем его произвольно. Введём прямоугольную систему координат Oxy как показано на рисунке 8. Составим дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения (1) в данном случае:

$$m\frac{d^2x_C}{dt^2} = F\cos\beta + P\sin\alpha + F_{тр}\ ; \qquad (2)$$

$$m\frac{d^2y_C}{dt^2} = N - P\cos\alpha - F\sin\beta\ ; \qquad (3)$$

$$m\frac{R^2}{2}\varepsilon = FR - F_{тр}R - M\ . \qquad (4)$$

За положительное направление для моментов принято направлеие по ходу часовой стрелки, то есть в ту сторону. Куда будет вращаться барабан при движении центра C от оси Oy.

1) Найдём $x_C = f(t)$. Так как в данной задаче $y_C = R = const$, то $\frac{d^2y_c}{dt^2} = 0$, тогда уравнения (2) –(4) содержат четыре неизвестные величины: $\frac{d^2x_C}{dt^2}, \varepsilon, N, F_{тр}$.

Поэтому необходимо найти ещё одно соотношение, связывающее эти величины. Для этого учтём, что $\ddot{x}_C = a_C$ (так как центр C движется прямолинейно) и что при качении без скольжения в точке B находится мгновенный центр скоростей. Тогда

$$V_C = \omega R, \quad a_C = \dot{V}_C = \dot{\omega} R = \varepsilon R \text{ или } \ddot{x}_C = \varepsilon R. \qquad (5)$$

Теперь из уравнения (4) можно исключить ε, подставив в (4) найденное значение εR; разделив обе части уравнения (4) на R, получим:

$$\frac{1}{2} m \frac{d^2 x_C}{dt^2} = F - F_{mp} - \frac{M}{R}. \qquad (6)$$

Далее, почленно равенства (2) и (6), исключим из них F_{mp} и получим:

$$\frac{3}{2} m \frac{d^2 x_C}{dt^2} = F(1+\cos\beta) + P\sin\alpha - \frac{M}{R} = 0{,}8P(1+\cos 30^0) + P\sin 30^0 - 1{,}1P = 0{,}89P$$

Отсюда, так как $P = mg$, то имеем:

$$\frac{d^2 x_C}{dt^2} = 0{,}6g. \qquad (7)$$

Интегрируя уравнение (7), получим

$$\frac{dx_C}{dt} = 0{,}6gt + C_1; \quad \rightarrow \quad x_C = 0{,}3gt^2 + C_1 t + C_2. \qquad (8)$$

Удовлетворяя начальным условиям: $t = 0$, $V_C = \dot{x}_C = 0$, $x_C = 0$ (ось Oy проходит через начальное положение точки C), найдём, что $C_1 = 0$, $C_2 = 0$.

Таким образом, закон движения центра C имеет вид:

$$x_C = 0{,}3gt^2. \qquad (9)$$

2) Найдём $f_{\min}$. При определении f исходим из того, что при качении без скольжения сила трения должна удовлетворять неравенству:

$$\left|F_{mp}\right| \le fN. \qquad (10)$$

Величину N находим из уравнения (3), учитывая, что $\ddot{y}_C = 0$, получим:

$$N = P\cos\alpha + F\sin\beta = P\cos 30^0 + 0{,}8P\sin 30^0 = 1{,}27P \qquad (11)$$

Значение F_{mp} проще всего найти из уравнения (6), заменив в нём $\ddot{x}_C$ его значением (7). Получим:

$$0{,}3mg = F - F_{mp} - \frac{M}{R}. \qquad (12)$$

Так как $mg = P$, то из (12) имеем:

$$F_{mp} = F - \frac{M}{R} - 0{,}3P = 0{,}8P - 1{,}1P - 0{,}3P = -0{,}6P. \qquad (13)$$

Знак минус в выражении для F_{mp} указывает на то, что сила $\overline{F}_{mp}$ направлена противоположно показанному на рисунке 8 направлению.

Подставляя значения F_{mp} и N из равенств (13) и (11) в неравенство (10), получим:

$$0{,}6P \le 1{,}27Pf \quad \rightarrow \quad f \ge 0{,}47. \qquad (14)$$

Следовательно, наименьший коэффициент трения, при котором возможно качение барабана без скольжения $f_{\min} = 0{,}47$.

7. Общее уравнение динамики.

При движении системы с *идеальными связями в каждый данный момент времени сумма элементарных работ всех приложенных активных сил и всех сил инерции на любом возможном перемещении системы будет равна нулю*:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^a + \sum_{k=1}^{n} \delta A_k^u = 0 \qquad (1)$$

(принцип Даламбера-Лагранжа),

где $\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^a$, $\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^u$ - сумма элементарных работ активных и сумма элементарных работ сил инерции соответственно.

Уравнение (1) называется *общим уравнением динамики*.

Пример 8. Механическая система состоит из обмотанных нитями блока 1 радиуса R и ступенчатого шкива 2 (радиусы ступеней R_2 и r_2, радиус инерции относительно оси вращения ρ_2), а также из грузов 3 и 4, прикреплённых к этим нитям. Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и пары сил с моментом M, приложенной к блоку 1.

Дано: $P_1 = 0$, $P_2 = 30н$, $P_3 = 40н$, $P_4 = 20н$, $M = 16нм$, $R_1 = 0{,}2м$, $R_2 = 0{,}3м$, $r_2 = 0{,}15м$, $\rho_2 = 0{,}2м$.

Определить: ускорение груза 3, пренебрегая трением.

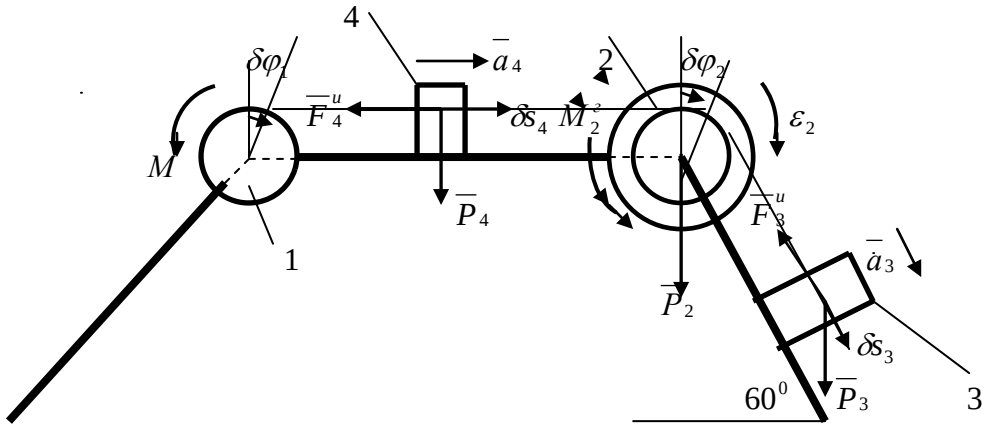

Рис. 9

<u>*Решение.*</u>

1) Рассмотрим движение механической системы, состоящей из тел 1,2,3,4, соединённых нитями. Система имеет одну степень свободы. Связи, наложенные на эту систему, идеальные.

Для определения a_3 применим общее уравнение динамики (1).

2) Задавшись направлением ускорения a_3, изображаем на рисунке 9 помимо активных сил, силы инерции $\bar{F}_3^u, \bar{F}_4^u$ и пару сил с моментом M_2^u, величины которых соответственно равны:

$$F_3^u = \frac{P_3}{g} a_3, \qquad F_4^u = \frac{P_4}{g} a_4, \qquad M_2^u = \frac{P_2}{g} \rho_2^2 \varepsilon_2. \tag{2}$$

3) Сообщая механической системе возможное перемещение и составляя уравнение (1), получим:

$$(P_3 \sin 60^0 - F_3^u)\delta s_3 - M_2^u \delta\varphi_2 - F_4^u \delta s_4 - M\delta\varphi_1 = 0. \tag{3}$$

Выразим все перемещения через $\delta\varphi_2$:

$$\delta s_3 = R_2 \delta\varphi_2; \qquad \delta s_4 = r_2 \delta\varphi_2; \qquad \delta\varphi_1 = \frac{r_2}{R_1}\delta\varphi_2. \tag{4}$$

Подставив величины (2) и (4) в уравнение (3), приведём его к виду:

$$[P_3(\sin 60^0 - \frac{a_3}{g})R_2 - \frac{P_2}{g}\rho_2^2 \varepsilon_2 - \frac{P_4}{g} a_4 r_2 - M\frac{r_2}{R_1}]\delta\varphi_2 = 0 \tag{5}$$

Входящие в (5) величины ε_2 и a_4 выразим через искомую величину a_3:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_3}{R_2}; \qquad a_4 = \varepsilon_2 r_2 = \frac{r_2}{R_2} a_3. \tag{6}$$

Затем, учитывая, что $\delta\varphi_2 \neq 0$, приравняем нулю выражение, стоящее в (5) в квадратных скобках. Из полученного в результате уравнения найдём:

$$a_3 = \frac{P_3 R_2 \sin 60^0 - M\dfrac{r_2}{R_1}}{P_3 R_2 + P_2 \dfrac{\rho_2^2}{R_2} + P_4 \dfrac{r_2^2}{R_2}} g. \tag{7}$$

Подставив в (7) числовые значения заданных величин, получим:

$$a_3 = -0{,}9 м/с^2.$$

Знак минус указывает, что ускорение груза 3 и ускорения других тел направлены противоположно направлениям, показанным на рисунке 9.

Список рекомендуемой литературы

1. Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики: в 2-х т. / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. - Т.1 : Статика и кинематика; Т.2: Динамика. - 11-е изд., стер. - СПб. : Изд-во "Лань", 2009. - 736 с. : ил. ; 21 см. - (Учебники для вузов. Специальная литература).
2. Митюшов, Е.А. Теоретическая механика. Учебник для студентов вузов./ Е.А. Митюшов,С.А. Берестова. – М.: Академия, 2006. –320 с.
3. Никитин, Н.Н. Курс теоретической механики / Н.Н. Никитин. – М.: Высшая школа, 1990. –607 с.
4. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики / С.М. Тарг. – М.: Высшая школа, 2010. – 416 с.
5. Мещерский, И.В. Задачи по теоретической механике: Учебное пособие / Под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – СПб.: Изд-во "Лань", 2010. – 448 с.
6. Статика. Электронное издание локального распространения, 060190 Э. Методическое пособие. Сост. Ольшанский В.Ю., Ткаченко Г.П. СГТУ, 2005.
7. Кепе, О.Э. Сборник коротких задач по теоретической механике / О.Э. Кепе. – СПб.: Изд-во "Лань", 2008. – 368 с.